MAT 301 Diferansiyel Geometri I Arasınav Cevap Anahtarı

SORU 1: $P_0=(a,b,c)$, $P_1=(a+1,b,c)$, $P_2=(a,b+\cos\theta,c+\sin\theta)$, $P_3=(a,b-\sin\theta,c+\cos\theta)$

$\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\overrightarrow{P_0P_3}\}$ E^3 Öklid uzayının ortonormal bazı olursa $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ Öklid dik çatısı olacaktır. O halde $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\overrightarrow{P_0P_3}\}$ sisteminin E^3 için ortonormal baz olduğunu gösterelim.

$\overrightarrow{P_0P_1}=P_1-P_0=(1,0,0)$
$\overrightarrow{P_0P_2}=P_2-P_0=(0,\cos\theta,\sin\theta)$
$\overrightarrow{P_0P_3}=P_3-P_0=(0,-\sin\theta,\cos\theta)$

$$\|\overrightarrow{P_0P_1}\|=\sqrt{\langle P_0P_1,P_0P_1\rangle}=1$$
$$\|\overrightarrow{P_0P_2}\|=\sqrt{\langle P_0P_2,P_0P_2\rangle}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
$$\|\overrightarrow{P_0P_3}\|=\sqrt{\langle P_0P_3,P_0P_3\rangle}=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\langle\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\rangle=\langle(1,0,0),(0,\cos\theta,\sin\theta)\rangle=0$$
$$\langle\overrightarrow{P_0P_2},\overrightarrow{P_0P_3}\rangle=0$$
$$\langle\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_3}\rangle=0$$

O halde $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\overrightarrow{P_0P_3}\}$ sistemi ortonormal sistemdir. Şimdi baz olduğunu gösterelim. Lineer bağımsız ve germe aksiyomunu sağlamalı.

Lineer bağımsız mı?

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq0$$ O halde lineer bağımsız.

3 boyutlu uzayda 3 vektör lineer bağımsız ise germeyi sağlar. Böylece $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\overrightarrow{P_0P_3}\}$ sistemi E^3 Öklid uzayı için ortonormal bazdır. Dolayısıyla $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ Öklid dik çatısını oluşturur.

Soru 2: $\vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$ ve $f: E^n \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonun $\vec{v}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi $\vec{v}_p[f]$ ile gösterilir

$$\vec{v}_p[f] = \frac{d}{dt} f(p+tv)\Big|_{t=0}$$

reel sayısı olarak tanımlıdır. Ayrıca $\vec{v} = (v_1, \dots v_n) \in E^n$ için

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

şeklinde de verilir. Şimdi lineer olduğunu gösterelim. $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{v}_p[af+bg] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial(af+bg)}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \left(a \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + b \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p \right)$$

$$= \underbrace{a \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p}_{a \vec{v}_p[f]} + \underbrace{b \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p}_{b \vec{v}_p[g]}$$

O halde $\vec{v}_p[af+bg] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$ eşitliği sağlandığından

$\vec{v}_p[f]$ lineerdir

Soru 3: $\vec{v}=(2,2,-1)$, $\quad P=\left(\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad , f=x_1\sin x_2+x_3\cos x_2$

$$\vec{v}_P[f]=\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P$$

$$=\underbrace{v_1}_{2}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_P}_{\sin x_2|_P}+\underbrace{v_2}_{2}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_P}_{(x_1\cos x_2-x_3\sin x_2)|_P}+\underbrace{v_3}_{-1}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_P}_{\cos x_2|_P}$$

$$=2\cdot\sin\underbrace{x_2(P)}_{p_2}+2\cdot\underbrace{x_1(P)}_{p_1}\cdot\cos\underbrace{x_2(P)}_{p_2}-\underbrace{x_3(P)}_{p_3}\cdot\sin\underbrace{x_2(P)}_{p_2}-\cos\underbrace{x_2(P)}_{p_2}$$

$$=\cancel{2\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}}+\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\underbrace{\cos 0}_{1}-\cancel{\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}}-\underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$=\pi-1 \quad \#$$

Soru: $X_p[\langle Y,Z\rangle] \stackrel{?}{=} \langle D_{X_p}Y, Z\rangle|_p + \langle Y, D_{X_p}Z\rangle|_p$

$Y=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Z=\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$ o.ü

$\langle Y,Z\rangle=\sum_{i=1}^{n} y_i z_i$ elde edilir. $\langle Y,Z\rangle$ diferansiyel fonksiyonunun $\vec{X_p}$ tanjant vektörü yönündeki türevini bulalım:

$$X_p[\langle Y,Z\rangle]= X_p\left[\sum_{i=1}^{n} y_i z_i\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n} X_p[y_i z_i]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(X_p[y_i]z_i + X_p[z_i]y_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} X_p[y_i]z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i X_p[z_i]$$
$$=\langle(\underbrace{X_p[y_1], X_p[y_2], \dots, X_p[y_n]}_{D_{X_p}Y}), (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_n}_{Z})\rangle + \langle(\underbrace{y_1, y_2, \dots, y_n}_{Y}), (\underbrace{X_p[z_1], X_p[z_2], \dots, X_p[z_n]}_{D_{X_p}Z})\rangle$$

O halde

$X_p[\langle Y,Z\rangle]=\langle D_{X_p}Y, Z\rangle|_p + \langle Y, D_{X_p}Z\rangle|_p$ elde edilir.

Soru 5: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0$, $1 \leq i,j \leq n$ old gösteriniz

Çözüm: $[\,,\,]: \mathcal{X}(E^n) \times \mathcal{X}(E^n) \longrightarrow \mathcal{X}(E^n)$

$[X,Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]]$ dönüşümü ile tanımlan

br Lie operatörüdür

Buna göre $\forall f \in C^\infty(E^n,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y][f] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right][f] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}[f]}_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}\Big]}_{} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}[f]}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\Big]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0 = 0[f]$$

$\Rightarrow [X,Y]=0$ #